

Integração numérica por soma de áreas de triângulos: regra dos triângulos repetidos

Numerical integration by the sum of areas of triangles: triangles repeated rule

Pedro Carvalho Brom¹

Resumo: Estudamos os modelos de integrações numéricas mais eficientes tais como Regra dos Trapézios Repetidos, Regra dos Retângulos Repetidos, Regra dos Pontos Médios Repetidos nas principais famílias de curvas reais com intervalo de limite inferior e superior conhecidos. Propusemos uma modelagem interpolando meios aritméticos entre os limites e calculamos a soma de áreas formadas por triângulos, aqui denominado Regra dos Triângulos Repetidos. Determinamos sua região de melhor precisão e comparamos com outros sistemas a eficiência do método em baixas iterações.

Palavras-chave: Cálculo Numérico; Integração Numérica; Integração por Triângulos.

Abstract: *We studied models of more efficient numerical integration such as the trapezium Repeated Rule, Rule of rectangles repeated, Rule Average Points repeated in the main families of real curves with an interval of lower and upper bounds known. We proposed a model interpolating between the arithmetic means calculated limits and the sum of areas formed by triangles, here called Rule Triangles repeated. We determined its region of better accuracy compared with other systems and the efficiency of the method at low iterations.*

Keywords: *Numerical, Numerical Integration, Integration by triangles.*

1. Introdução

O cálculo numérico é a resolução de problemas em que os métodos convencionais não suportam, ou, se suportam, requerem muito esforço humano, e certamente seu procedimento será facilitado por métodos computacionais. O objeto de estudo neste material é a integração numérica que consiste em resolução de uma integral usando técnicas numéricas. A integração numérica por vezes pode ser encontrada na literatura com a denominação de quadratura. Ueberhuber (1997, p.71) e Krommer (1998, p.49) usa a palavra quadratura para tratar de computação numérica para integrar uma função de uma variável e o termo cubatura para integral múltipla.

A integração pela quadratura significa resolver uma integral analiticamente, isto é, simbolicamente nos termos de funções conhecidas, ou resolvê-la por uma integral numérica. Para exemplificar temos a quadratura e fórmulas gaussianas de quadratura. Uma regra de quadratura gaussiana de n pontos, chamada assim em homenagem a Carl Friedrich Gauss, é uma regra de quadratura construída para produzir um resultado exato para polinômios de grau $2n - 1$ ou menor para uma escolha adequada dos pontos x_i e pesos w_i para $i = 1, \dots, n$. O domínio de

¹ Licenciado em Matemática pela UEMG, Especialista em Matemática e Estatística pela UFLA. Professor de Matemática e Estatística do Instituto Federal de Brasília, *Campus Gama*.

integração de tal regra é por convenção tomado como $[-1, 1]$, de modo que a regra é expressa como:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(w_i)$$

Pode ser mostrado que os pontos usados para avaliar a função são exatamente as raízes de um polinômio pertencente a uma classe de polinômios ortogonais.

A palavra quadratura é usada também como enquadrar, ou seja, a construção de um quadrado usando somente o compasso e o estreitamento que tem a mesma área que uma figura geometricamente dada. Se a quadratura for possível para uma figura plana, diz-se ser enquadável.

As técnicas de quadratura e cubatura disponíveis em no programa Mathematica incluem a integração de Monte Carlo, executada como `NIntegrate[f..., Método->MonteCarlo]` ou `NIntegrate[f..., Método->QuasiMonteCarlo]`, e o algoritmo adaptável de Genz-Malik, executado como `NIntegrate[f..., Método->MultiDimensional]`.

Há uma larga escala dos métodos disponíveis para integração numérica. As funções podem ser integradas com, por exemplo, o programa Mathematica usando `NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}`], em programas com rotinas geradas em FORTRAN, ou, até mesmo em planilhas bem elaboradas em EXCEL (Office) ou CALC (Libre-Office).

A técnica numérica mais direta da integração é a que usa quadratura ou também chamada Newton-Cotes, que aproximam uma função tabulada em uma sequência de intervalos regularmente espaçados por vários polinômios que muitas vezes são do mesmo grau. A fórmula de três pontos é chamada de Regra Trapezoidal ou Regra de Simpson.

1.1 Regra Trapezoidal Simples

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

1.2 Regra de Simpson Simples

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}$$

1.3 Regra Trapezoidal Composta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + f(x_n)]$$

$$\therefore h = \frac{(b-a)}{2}$$

1.4 Regra de Simpson Composta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\therefore h = \frac{(b-a)}{2}$$

A fórmula com cinco pontos é chamada de regra de Boole. Uma generalização da Regra Trapezoidal é a integração de Romberg. A Regra de Romberg combina a Regra do Trapézio com a extrapolação de Richardson.

1.5 Regra de Boole

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{4 \left(\frac{b-a}{4m} \right)}{90} \left(7f(x_1) + 32 \sum_{i=2,6,10}^{n-3} f(x_i) + 12 \sum_{i=3,7,11}^{n-2} f(x_i) + 32 \sum_{i=4,8,12}^{n-1} f(x_i) + 14 \sum_{i=5,9,13}^{n-4} f(x_i) \right);$$

$$\therefore x_i = a + (i-1) \cdot \frac{(b-a)}{4m} \text{ e } n = 4m + 1$$

1.6 Regra de Romberg

$$I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \frac{h}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f \left[a + \frac{(2i-1)}{2^{k-1}} h \right]; k = 2, 3, \dots, n$$

$$\therefore h = \frac{(b-a)}{n}$$

Se as funções forem conhecidas analiticamente em vez de tabuladas em intervalos igualmente espaçados, o melhor método numérico para integrar será a quadratura de Gauss. Escolhendo as abscissas para avaliar a função, a quadratura gaussiana produz excelentes aproximações, entretanto, com a velocidade dos computadores modernos, a complicação das marcas gaussianas e do formalismo da quadratura, muitas vezes é menos desejável do que simplesmente a "força-bruta" que calcula pontos em uma tabulação regular. Uma referência de leitura e estudo para quadraturas de Gauss é Hildebrand (1956).

2. Objetivos

O presente trabalho se limita em estudar os modelos de integração numérica mais populares, tais como Regra dos Trapézios Repetidos, Regra dos Retângulos Repetidos, Regra dos Pontos Médios Repetidos, nas principais famílias de curvas reais com limites superior e inferior conhecidos e propor uma nova experiência que interpola meios aritméticos entre os limites, calculando a área da curva projetada por soma de triângulos. Nesta nova experiência de integração numérica, Regra dos Triângulos Repetidos, não foi estipulada a fórmula do erro por iteração. Para estudar o erro verificamos os resíduos gerados entre o modelo proposto e os mais usuais, admitindo uma variação limite de 5% com as principais famílias de curvas reais. No estudo comparativo entre os métodos, determinamos a região de melhor convergência para todos e comparamos o percentual de precisão por iterações.

3. Revisão de literatura

Neste tópico vamos estudar os métodos avaliados no trabalho para aproximar a função primitiva e sua resultante da integração. O problema de modo geral corresponde a uma equação diferencial, uma vez que $F' = f$. De forma mais objetiva basta efetuar a integração no certo intervalo $I = [a, b]$, efetuando uma aproximação por interpolação polinomial, obtendo uma aproximação razoável da função através de polinômios, que, em geral, são mais fáceis de integrar. As informações aqui contidas podem ser consultadas em MORAIS, 1999.

3.1 Fórmulas de Gauss

As regras gerais de Newton-Cotes serão abordadas com os nós de quadratura igualmente espaçados no intervalo de integração. Esta condição gera o grau de quadratura do polinômio $Q(f)$, já que estão sendo usados nós z_1, z_2, \dots, z_n e seus pesos A_1, A_2, \dots, A_n , da seguinte fórmula:

$$Q(f) = A_1f(z_1) + A_2f(z_2) + \dots + A_nf(z_n)$$

Para aumentar o grau da quadratura de uma fórmula podemos admitir que a referência do nó seja uma incógnita e deste modo duplicamos os graus de liberdade.

Por padrão tomamos o intervalo de referência $I = [-1, 1]$, observando que podemos mudar a referência para qualquer intervalo $I = [a, b]$, o que trata de mudança de variável:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a) \int_a^b f\left(a + \frac{1}{2}(t+1)(b-a)\right) dt$$

No caso da Regra dos Trapézios podemos definir uma Regra do Ponto Médio Composta, utilizando em cada subintervalo. Podendo, então, escolher tanto uma quanto a outra para polinômios de grau 1, uma vez que são idênticas para primeiro grau. Quando aplicadas a Regra dos Pontos Médios Composta utiliza n intervalos e a Regra dos Trapézios Composta exige $n + 1$ pontos intervalados.

3.1.1 Regra dos Trapézios Simples.

Seja:

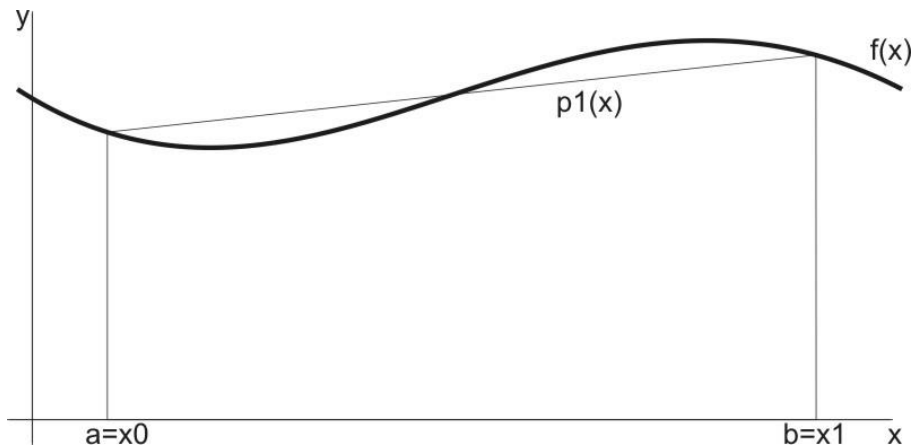


Figura 1: Esquema técnico da Regra dos Trapézios Simples.

Trata-se do caso mais simples da fórmula de Newton-Cotes fechada. Neste caso, consideramos o $n = 1$ e apresentamos apenas dois nós de integração: $x_0 = a$ e $x_1 = b$. A figura 1 também apresenta os valores:

$$A_0 = A_1 = \frac{(b - a)}{2}$$

Isto pode ser obtido pela resolução do sistema do método dos coeficientes indeterminados ou por integrais dos polinômios de Lagrange, $l_0(x)$ e $l_1(x)$. Portanto podemos definir a Regra dos Trapézios Simples por:

$$T(f) = \frac{[f(a) + f(b)].(b - a)}{2}$$

Que equivale ao valor da área do trapézio definido pela reta interpoladora.

3.1.1.1 Teorema do Valor Intermédio para Integrais.

Sejam f e g funções contínuas em $I = [a, b]$, se g não muda de sinal no intervalo, temos:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\varepsilon) \cdot \int_a^b g(x) dx; \quad \varepsilon \in I = [a, b]$$

3.1.1.2 Erro da Regra dos Trapézios Simples.

Para determinar o valor do erro absoluto temos:

$$E(f) = I(f) - T(f)$$

Sabemos também que:

$$I(f) - T(f) = I(f) - I(p_1) \Rightarrow E(f) = I(f - p_1)$$

Da fórmula de erro de interpolação temos:

$$f(x) - p_1(x) = f_{[a,b,x]}(x-a)(x-b)$$

Como $(x-a)(x-b)$ não muda de sinal no intervalo, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermédio para Integrais e obter:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f_{[a,b,x]}(x-a)(x-b)dx \\ &= f_{[a,b,x]} \int_a^b (x-a)(x-b)dx, \epsilon \in [a,b] \end{aligned}$$

Supondo que f é $C^2 [a,b]$, obtemos a fórmula de erro:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\epsilon), \epsilon \in [a,b]$$

3.1.2 Regra dos Trapézios Composta.

É certo de que ao usar a Regra dos Trapézios Simples obteremos um resultado impreciso, logo se faz necessário aumentar a quantidade de nós, ou seja, intervalos para aprimorar a precisão do método.

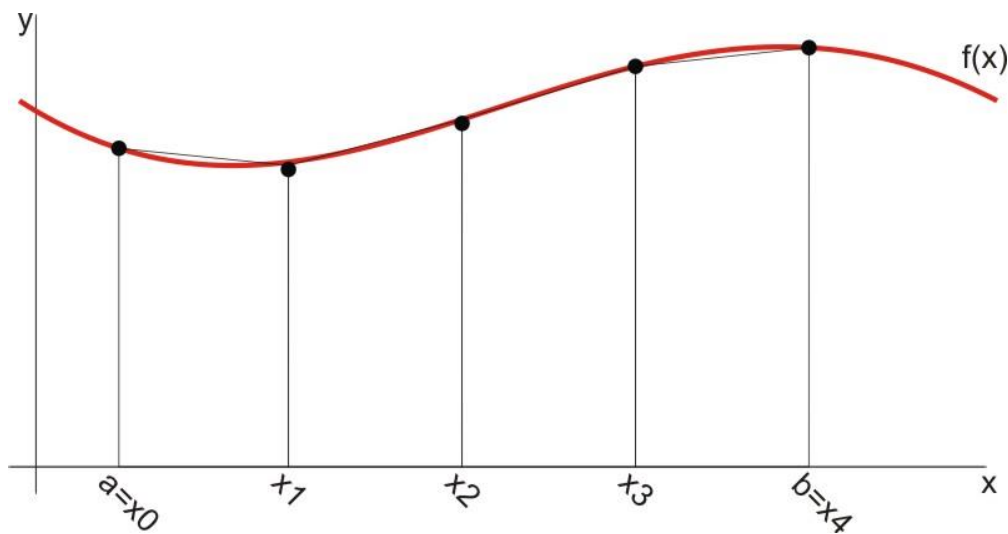


Figura 2: Esquema técnico Regra dos Trapézios Compostas para 4 áreas.

Decompondo a região em subintervalos, consideremos que o tamanho destes subintervalos seja constante "h". Assim definimos:

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

Em que n é o número de subintervalos (também igual ao número de nós -1), e temos: $x_i = a + i.h$, portanto o valor da integral é igual ao somatório das integrais dos subintervalos:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Logo, aplicando a Regra dos Trapézios Simples a cada um destes subintervalos, obtemos:

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Como existem termos repetidos nesta soma, podemos simplificar a expressão, obtendo a Regra dos Trapézios Composta:

$$T_n(f) = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

3.1.2.1 Erro da Regra dos Trapézios Composta.

Da fórmula do erro para o procedimento simples, podemos verificar que o erro da regra composta será o somatório de cada erro obtido nos subintervalos, ou seja:

$$E_n(f) = - \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12} f''(\epsilon_i) = - \frac{h^3 n}{12} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\epsilon_i) \right]$$

Como $n = \frac{(b-a)}{h}$ e também podemos aplicar o teorema clássico do valor intermédio à média das 2^{as} derivadas, obtemos a fórmula do Erro da Regra dos Trapézios Composta:

$$E_n(f) = - \frac{(b-a) \cdot h^3}{12} f''(\epsilon); \epsilon \in [a, b]$$

3.1.3 Regra dos Pontos Médios Repetidos.

Seja $f(x)$ uma função não negativa e contínua no intervalo $[a, b]$ em "n" subintervalos de amplitude:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

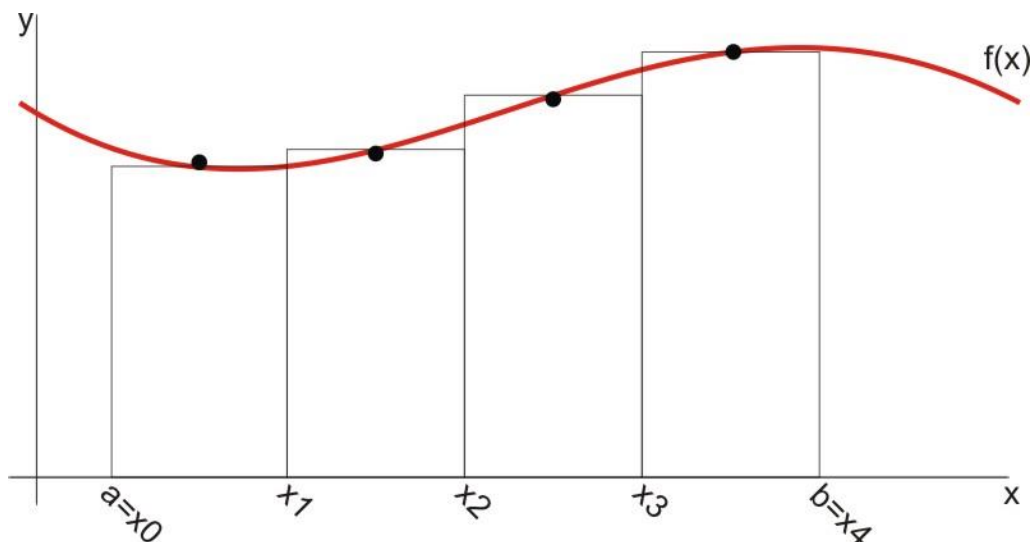


Figura 3: Esquema técnico da Regra dos Pontos Médios.

A área abaixo da curva $f(x)$ é aproximada pela área dos retângulos que tem por base Δx , em que n é o número de divisões e por altura $f(x_m)$, x_m sendo o ponto médio de cada subintervalo. Cada subintervalo "i" tem limite inferior $x_{inf_i} = a + (i - 1)\Delta x$ e limite superior $x_{sup_i} = a + i\Delta x = x_{inf_{i+1}}$. Deste modo o ponto médio de cada subintervalo será:

$$x_{med_i} = \frac{[a + (i - 1)\Delta x + a + i\Delta x]}{2} = a + i\Delta x - \frac{\Delta x}{2}$$

A área de cada retângulo será, então, $\Delta x \cdot f(x_{med_i})$ e, em consequência:

$$\int_a^b f(x) \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{med_i})$$

3.1.4 Regra dos Retângulos Repetidos: Ponto Direito e Esquerdo.

Estes dois procedimentos são variantes da regra do ponto médio. Na Regra do Ponto à Esquerda substitui-se $f(x_{med_i})$ por $f(x_{inf_i})$, sendo x_{inf_i} o limite inferior de cada subintervalo, enquanto que na Regra do Ponto à Direita, $f(x_{med_i})$ por $f(x_{sup_i})$ e x_{sup_i} é o limite superior de cada subintervalo.

4. O modelo proposto.

O problema consiste em estudar a integração numérica por soma de áreas de triângulos numa função real pertencente ao intervalo $I = [x_0, x_f]$, sendo x_i elemento intermediário pertencente a I , conforme a figura 4:

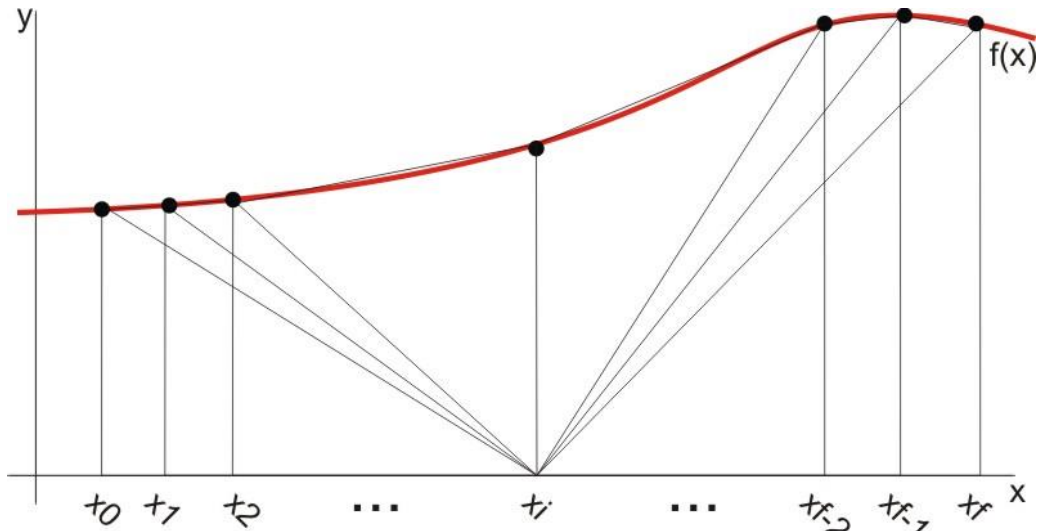


Figura 4: Esquema técnico de uma sequencia infinita de iterações do modelo proposto.

Propusemos uma modelagem em coordenadas para garantir o funcionamento do sistema, de forma geral na figura 5:

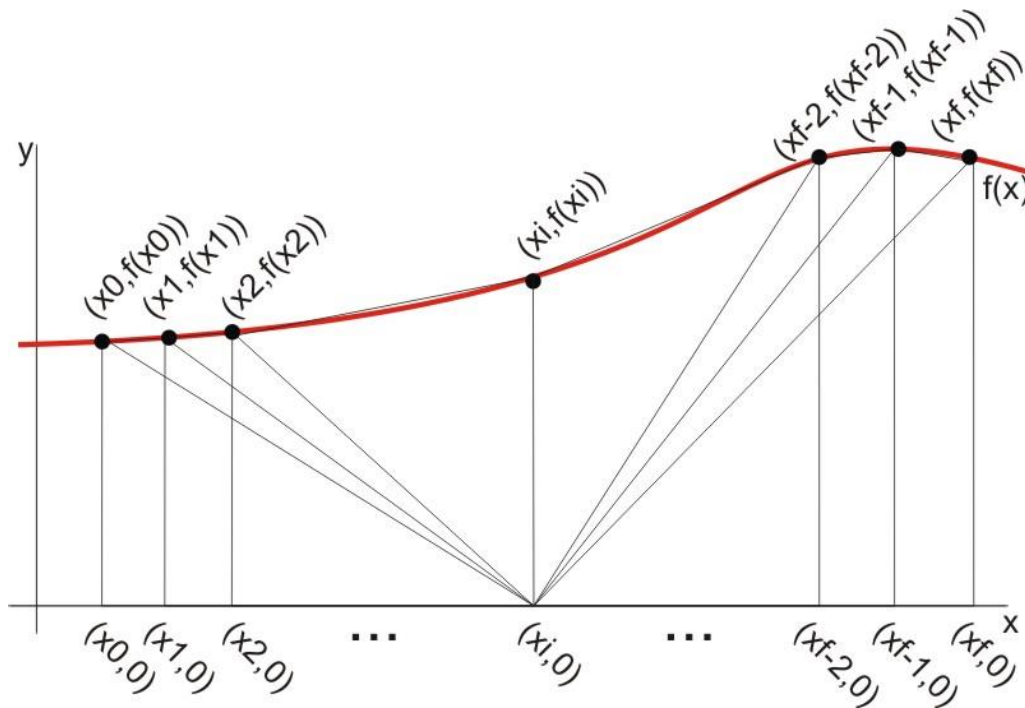


Figura 5: Esquema técnico das coordenadas propostas pelo modelo.

Por Geometria Analítica temos que o cálculo de área de um triângulo é descrito por:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

Adaptando para o modelo ilustrado na figura 2, temos que a área da função $f(x)$ no intervalo $[x_0, x_f]$ é a soma de todas as áreas dos subintervalos $x_0, x_1, x_2, \dots,$

$x_i, \dots, x_{f-2}, x_{f-1}, x_f$. Notamos também que a área referente aos pontos $(x_0, 0)$; $(x_0, f(x_0))$; $(x_i, 0)$; $(x_i, f(x_i))$; $(x_f, 0)$; $(x_f, f(x_f))$ não varia, independente do número de interpolações aplicada. Logo temos:

Primeira área (A_0):

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_i & f(x_i) & 1 \\ x_0 & f(x_0) & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|f(x_0) \cdot (x_i - x_0)|}{2}$$

Última área (A_f):

$$A_f = \frac{\begin{vmatrix} x_f & 0 & 1 \\ x_i & f(x_i) & 1 \\ x_f & f(x_f) & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|f(x_f) \cdot (x_f - x_i)|}{2}$$

Área intermediária (A_{x_j}):

$$A_{x_j} = \frac{\begin{vmatrix} x_j & f(x_j) & 1 \\ x_i & f(x_i) & 1 \\ x_{(j+1)} & f(x_{(j+1)}) & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$A_{x_j} = \frac{|f(x_i) \cdot (x_j - x_{(j+1)}) + f(x_j) \cdot (x_{(j+1)} - x_i) + f(x_{(j+1)}) \cdot (x_i - x_j)|}{2}$$

Assim a soma das áreas pode ser expressa por:

Área total (A_t):

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} f(x_0) \cdot (x_i - x_0) + \\ \sum_{j=1}^n f(x_i) \cdot (x_j - x_{(j+1)}) + f(x_j) \cdot (x_{(j+1)} - x_i) + f(x_{(j+1)}) \cdot (x_i - x_j) + \\ f(x_f) \cdot (x_f - x_i) \end{array} \right|$$

Ou de forma reduzida:

$$A_t = A_0 + \sum_{j=1}^n A_{x_j} + A_f$$

Uma vez definida a área total, podemos iniciar os procedimentos da interpolação aritmética e seu passo iterativo. O passo iterativo é definido por uma

progressão aritmética, o que implica em passo igual a razão "r" com "n" interpolações e pode ser representado por:

$$r = \frac{x_f - x_0}{n + 1}$$

Assim teremos sempre $n + 2$ termos, $n + 2$ áreas e em específico a área total pode ser reescrita em função do número de interpolações.

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + \\ \sum_{j=1}^{n+2} f(x_j) \cdot (x_j - x_{j+1}) + f(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) + f(x_{j+1}) \cdot (x_i - x_j) + \\ f(x_{n+1}) \cdot (x_{n+1} - x_i) \end{array} \right]$$

Note que usamos $n + 1$ ao invés de $n + 2$ para substituir f . Isto ocorre devido o procedimento de contagem iniciar em A_0 . Também convém observar que x_i deve ser testado nos limites x_0 e x_{n+1} , considerados, para verificar se oferece maior precisão nos resultados iniciais.

5. O material

Recurso computacional de Applet em Java (INTERMAT, 2005) e planilha de cálculo em EXCEL.

6. Os parâmetros

Utilizamos os parâmetros: Número de iterações $n = 10$ e $I = [0, 1]$. Com esses valores comparamos os resultados do método, aqui neste trabalho definido por Regra dos Triângulos Repetidos (R_0) com os seguintes métodos: Regra dos Trapézios Repetidos (R_1), Regra dos Retângulos Repetidos (R_2), Regra dos Pontos Médios Repetidos (R_3). Funções em estudo: $f_1(x) = x$; $f_2(x) = x^2$; $f_3(x) = x^3$; $f_4(x) = \sqrt{x}$; $f_5(x) = \ln(x)$; $f_6(x) = e^x$; $f_7(x) = \text{sen}(x)$; $f_8(x) = \text{cos}(x)$; $f_9(x) = \text{tg}(x)$; $f_{10}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$; $f_{11}(x) = \frac{1}{e^x}$

7. Os resultados

Construímos uma tabela para cada função e distribuimos as linhas em método aplicado com: R_0, R_1, R_2, R_3 e colunas em área real (A_r), área total (A_t), diferença entre A_r e A_t (Dif) e percentual da diferença (%Dif). O método convergente em no máximo 5% de %Dif está destacado em vermelho e o de melhor convergência com plano de fundo cinza. Comparamos os desempenhos com 10 iterações, tolerando 5% de %Dif, conforme detalhado abaixo:

Tabela 1:	Resultados para $f(x) = x$			
	Ar	0,5		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,5	0	0,00000%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,478963	0,021037	4,207400%
	Se Xi = Xf	0,454545	0,045455	9,09100%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = X0	0,5	0	0
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0	0,5	100,00000%
	R2	0,55	0,05	10,00000%
R3	0	0,5	100,00000%	

Tabela 2:	Resultados para $f(x) = x^2$			
	Ar	0,333333333		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,623966	0,290633	46,57829%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,328106	0,005227	1,568200%
	Se Xi = Xf	0,289256	0,044077	13,22320%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = inv(f(med.f(x)))	0,328106	0,005227	1,568200%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,334999	0,001666	0,49970%
	R2	0,385	0,051667	15,50000%
R3	0,3325	0,000833	0,25000%	

Tabela 3:	Resultados para $f(x) = x^3$			
	Ar	0,25		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,669045	0,419045	62,63331%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,254856	0,004856	1,942400%
	Se Xi = Xf	0,206611	0,043389	17,35560%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = inv(f(med.f(x)))	0,254856	0,004856	1,942400%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,252499	0,002499	0,99960%
	R2	0,302499	0,052499	20,99960%
R3	0,24875	0,00125	0,50000%	

Tabela 4:	Resultados para $f(x) = \sqrt{x}$			
	Ar	0,666666667		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,639126	0,027541	4,30911%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,630179	0,036488	5,473150%
	Se Xi = Xf	0,615858	0,050809	7,62130%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = X0	0,639126	0,027541	4,30911%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,660509	0,006158	0,92365%
	R2	0,710509	0,043842	6,57635%
R3	0,668383	0,001716	0,25745%	

Tabela 5:	Resultados para $f(x) = \ln(x)$			
	Ar	0,386294		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,377703	0,008591	2,27454%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,367668	0,018626	4,821716%
	Se Xi = Xf	0,354443	0,031851	8,24527%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = X0	0,377703	0,008591	2,27454%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,385877	0,000417	0,10795%
	R2	0,423505	0,037211	9,63282%
R3	0,386502	0,000208	0,05384%	

Tabela 6:	Resultados para $f(x) = e^x$			
	Ar	1,71828182		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	1,714015	0,004267	0,24894%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	1,653954	0,064328	3,743729%
	Se Xi = Xf	1,595906	0,122376	7,12199%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = X0	1,714015	0,004267	0,24894%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	1,719713	0,001431	0,08329%
	R2	1,805627	0,087345	5,08329%
R3	1,717566	0,000716	0,04166%	

Tabela 7:	Resultados para $f(x) = \text{sen}(x)$			
	Ar	0,459697		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,447395	0,012302	2,74970%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,43584	0,023857	5,189723%
	Se Xi = Xf	0,421132	0,038565	8,38922%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = X0	0,447395	0,012302	2,74970%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,459314	0,000383	0,08332%
	R2	0,501388	0,041691	9,06923%
R3	0,459889	0,000192	0,04177%	

Tabela 8:	Resultados para $f(x) = \text{cos}(x)$			
	Ar	0,84147		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,779251	0,062219	7,98446%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,799466	0,042004	4,991741%
	Se Xi = Xf	0,816332	0,025138	2,98739%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = Xf	0,816332	0,025138	2,98739%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,840769	0,000701	0,08331%
	R2	0,817784	0,023686	2,81484%
R3	0,841821	0,000351	0,04171%	

Tabela 9:	Resultados para $f(x) = \text{tg}(x)$			
	Ar	0,615626		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,874182	0,258556	29,57691%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,612252	0,003374	0,548060%
	Se Xi = Xf	0,5465	0,069126	11,22857%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = inv(f(med.f(x)))	0,612252	0,003374	0,548060%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,61764	0,002014	0,32715%
	R2	0,69551	0,079884	12,97606%

	R3	0,614622	0,001004	0,16309%
--	-----------	-----------------	-----------------	-----------------

Tabela 10:	Resultados para $f(x) = \frac{1}{x}$			
	Ar	1,791759		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	1,73614	0,055619	3,20360%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	1,764056	0,027703	1,546134%
	Se Xi = Xf	3,539619	1,74786	97,54995%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = inv(f(med.f(x)))	1,764056	0,027703	1,546134%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	1,811544	0,019785	1,10422%
	R2	1,60321	0,188549	10,52312%
R3	1,782039	0,00972	0,54248%	

Tabela 11:	Resultados para $f(x) = \frac{1}{e^x}$			
	Ar	0,63212		
	Escolha do Xi:	At	Dif	%Dif
	Se Xi = X0	0,598328	0,033792	5,64774%
	Se Xi = inv(f(med.f(x)))	0,605662	0,026458	4,185598%
	Se Xi = Xf	0,615834	0,016286	2,57641%
	Escolha do melhor ajuste:			
	R0	At	Dif	%Dif
	Xi = Xf	0,615834	0,016286	2,576410%
	Outros métodos:			
		At	Dif	%Dif
	R1	0,634627	0,002507	0,39660%
	R2	0,601041	0,031079	4,91663%
R3	0,631857	0,000263	0,04161%	

8. Avaliação dos resultados

Podemos notar uma convergência muito rápida com 10 iterações. Sua precisão é bem alinhada quando tolerado a margem de erro em 5%. R_0 se comparada aos métodos aqui estudados, percebemos que leva desvantagem com o método de R_3 . Comparando os valores tabelados, percebemos que o método se mostra bem eficiente em relação ao Método dos Retângulos Repetidos, igualmente eficiente tanto ao Método dos Pontos Médios quanto ao Método dos Trapézios Repetidos para altas iterações.

9. Conclusões

Considerando a rápida convergência com apenas 10 iterações, podemos concluir que o método é eficiente para as principais famílias de curvas apresentadas. Sua precisão é muito próxima dos métodos aqui estudados, garantindo um esforço computacional pequeno, o que minimiza custos de laboratório com equipamentos. Comparando os valores tabelados podemos perceber que o Método Regra dos Triângulos Repetidos é igualmente eficiente tanto ao Método dos Pontos Médios quanto ao Método dos Trapézios Repetidos para altas iterações e, em alguns casos, superior ao Método dos Retângulos Repetidos para baixas iterações.

10. Perspectivas

Acredito que a Regra dos Triângulos Repetidos teria melhor ajuste se X_i estiver em algum lugar geométrico calculado a partir da curva ao invés de sobreposto em O_x . Falta o cálculo do erro padronizado para o modelo e possivelmente a cubatura será o próximo passo.

Referências

HILDEBRAND, F. B. **Introdução à Análise Numérica**. York Novo: McGraw-Monte, p. 319-323, 1956.

INTERMAT. **Applets Java** – Métodos de Integração. Viçosa: UFV. Disponível em: <http://www.ufv.br/dma/intermat/APPLETS/calculo_numerico/integ_num/integ_num.htm>. Acesso em maio, junho e julho de 2005.

KROMMER, A. R.; Ueberhuber, C. W. **Construção de Fórmulas de Cubatura na Integração Computacional**. Filadélfia, Pa: SIÃO, p. 155-165, 1998.

MORAIS, R. A. de; T. Sáfiadi. **Cálculo Numérico**. Lavras: UFLA, 1999.

UEBERHUBER, C. W. **Computação Numérica 2: Métodos, Software e Análise**. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

Recebido em: 20/08/2012

Aceito em: 26/02/2013