

## **LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS: UM ESTUDO SISTEMÁTICO DO MODELO LINEAR**

### **THE PROJECTILE MOTION: A SISTEMATIC STUDY OF THE LINEAR MODEL**

Ricardo Parreira da Silva<sup>1</sup>

**RESUMO:** Embora o estudo da trajetória de projéteis, em lançamentos oblíquos e sob condições ideais, seja um tópico recorrente durante o período que compreende o final do ensino médio até as disciplinas universitárias básicas de Cálculo e Física, seu tratamento, nesse contexto, invariavelmente apresenta-o como uma mera aplicação de noções da Cinemática, a saber: dos movimentos uniforme e uniformemente variado em duas dimensões. Assim sendo, propriedades importantes e aplicações relevantes são, em geral, negligenciadas. Neste artigo desenvolvemos a teoria do lançamento oblíquo de projéteis sob condições ideais e destacamos suas principais propriedades. Apresentamos uma série de aplicações interessantes e não triviais, que podem, inclusive, ser estendidas para além do escopo deste texto, como, por exemplo, em Silva e Segre (2004).

**Palavras-Chave:** lançamento oblíquo; trajetória de projéteis; lei de Newton; Galileu Galilei.

**ABSTRACT:** *Although the study of projectile motion after an oblique launch be a recurrent topic of consideration both in high school as well in junior disciplines of Calculus and Physics in college, its classical approach, in this context, presents it as a mere application of uniform motion and uniformly accelerated motion in two dimensions. Therefore, some of the main properties as well interesting applications of this phenomenon are, in general, neglected. In this paper, we develop the basic theory of projectile motion, pointing out their main properties applying it to several non trivial and interesting problems that can be extended beyond the scope of this text, e.g. Silva e Segre (2004).*

**Keywords:** *Projectile launch; Projectile motion; Newton's law; Galileu Galilei.*

1. Doutor em Matemática pela  
Universidade de São Paulo  
UnB - Universidade de Brasília  
E-mail: rpsilva@unb.br  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1991983624732789>  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2163-6361>

## INTRODUÇÃO

Galileu Galilei (1564 - 1642) foi também um estudioso da Balística e o precursor da descrição precisa da trajetória de projéteis (Galilei, 1638). Até os experimentos de Galileu, pensava-se que quando um projétil era lançado o seu movimento devia-se ao *impetus*, o qual mantinha o projétil em linha reta e com velocidade constante. Durante o movimento, quando o *impetus* acabava, o projétil caía verticalmente até atingir o solo [vide Seção 5, A. 3.]. Galileu provou que a noção de *impetus* era equivocada decompondo o movimento de projéteis nas componentes horizontal e vertical, e, com o auxílio da geometria, demonstrando que qualquer objeto lançado na ausência de resistência do ar e sob o efeito da ação uniforme da gravidade, descrevia uma trajetória parabólica.

Com o desenvolvimento do cálculo diferencial e a fundamentação da mecânica clássica, cujos princípios básicos foram postulados por Isaac Newton (1642 - 1727) em Newton (1687), o problema da determinação da trajetória no lançamento de projéteis passou ao da determinação e resolução de um conjunto de equações diferenciais ordinárias, conhecidas como equações do movimento. Isso simplificou sobremaneira os estudos incipientes de Galileu.

Nos dias de hoje, para a apresentação do modelo de lançamento de projéteis sob condições ideais, veja por exemplo [Brito, 2010; Courant e John, 1965; Griffith e Synge, 1968; Stewart, 2009], não é necessária a introdução de ferramentas matemáticas sofisticadas. Isso faz com que ele seja amplamente empregado na literatura como um exemplo de aplicação das noções básicas em Cinemática: do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Logo, a bibliografia sobre o tema é abundante, porém, não rara, incompleta e esparsa. Uma busca menos minuciosa pelo tema negligenciaria propriedades importantes e aplicações interessantes.

Nosso propósito neste artigo foi o de preencher essa lacuna, destacando esse problema clássico da mecânica e tratando-o de forma sistemática e coordenada com o uso de requisitos matemáticos mínimos.

As aplicações foram pensadas e selecionadas para que complementassem a apresentação da teoria e mostrassem a abrangência do estudo realizado.

Embora neste texto não tenhamos a pretensão de apresentar resultados de pesquisa originais, acreditamos que a forma com que o problema do lançamento oblíquo de projéteis foi abordado, é, ao menos em essência, de interesse e utilidade coletiva, sendo, portanto, passível de publicação.

Este artigo foi estruturado da seguinte maneira: Na Seção 2, o problema do lançamento oblíquo de projéteis na ausência de resistência do meio e sob a ação gravitacional é apresentado. As equações do movimento são resolvidas e a trajetória parabólica determinada. Elementos intrínsecos como: tempo de voo, alcance e deslocamento do projétil, são destacados.

Na Seção 3, a parábola de segurança é apresentada e propriedades de otimização no lançamento são demonstradas. Na Seção 4, a trajetória de projéteis lançados ao longo de planos inclinados é determinada. Finalmente, na Seção 5, os resultados das seções anteriores são aplicados a uma série de problemas relevantes.

Para a completude do texto apresentamos no apêndice a técnica de integração da função  $\sec^3\alpha$  necessária para o bom desenvolvimento da Seção 2. Também apresentamos uma tabela contendo as principais relações obtidas de um lançamento oblíquo.

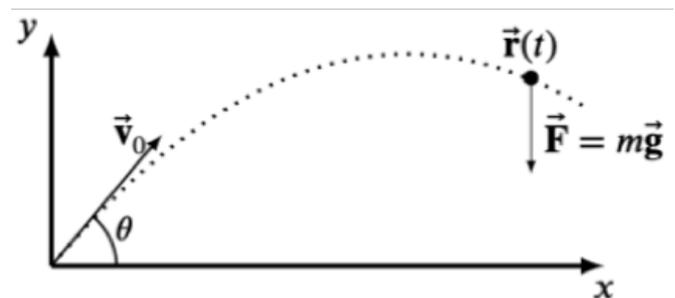
## LANÇAMENTO OBLÍQUO

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $Oxy$ , um projétil de massa concentrada  $m$  é lançado da origem com ângulo de elevação  $\theta$  com respeito ao eixo horizontal  $Ox$ , e com velocidade inicial de lançamento  $\vec{v}_0$ . Assumindo-se que o movimento ocorra no plano  $xy$ , que a resistência do ar seja desprezível, e que a única força ativa seja devida a ação da gravidade  $\vec{g}$ , pode-se fazer uso da segunda Lei de Newton do movimento:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

para derivar a posição  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  do projétil no instante de tempo  $t > 0$ .

Figura 1 - Lançamento de projétil



De fato, se  $\vec{F}$  representa a força peso do projétil, então:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (0, -mg) = m\vec{a} \\ &= m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = m \left( \frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Cancelando-se o fator  $m$  em (1), obtém-se que as equações (paramétricas) da trajetória do projétil satisfazem as equações:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -g \quad (2)$$

Interpretando-se fisicamente as equações do movimento em (2), observa-se que a componente horizontal  $x = x(t)$  da trajetória  $\vec{r}(t)$  possui aceleração nula enquanto que a componente vertical,  $y = y(t)$ , possui um módulo de aceleração constante devido a ação da gravidade. Dessa forma, espera-se que ao longo da componente  $x$  o projétil descreva um Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), enquanto, que ao longo da componente  $y$ , descreva um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV).

De fato, integrando-se de 0 a  $t$  as equações em (2) e observando que  $\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}_0$ ,

obtem-se a velocidade do projétil no instante de tempo  $t$ :

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt), \tag{3}$$

onde  $v_0 = |\vec{v}_0|$  é a velocidade escalar inicial de lançamento.

Similarmente, integrando-se (3) de 0 a  $t$  e observando que  $\vec{r}(0) = \vec{0}$ , tem-se que:

$$\vec{r}(t) = \left( v_0 \cos \theta t, v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2 \right) \tag{4}$$

No caso em que o lançamento é efetuado a partir de um ponto arbitrário  $P = (x_0, y_0)$ , (4) toma a forma:

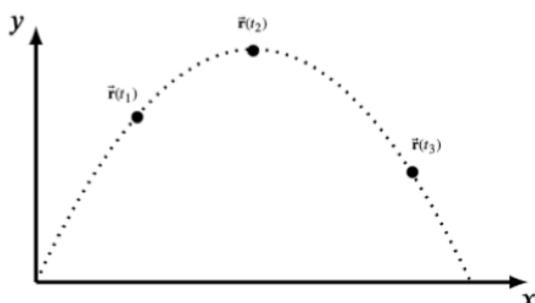
$$\vec{r}(t) = \left( x_0 + v_0 \cos \theta t, y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2 \right)$$

Isolando-se  $t$  na expressão  $x(t) = v_0 \cos \theta t$  e substituindo em  $y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2$ , obtém-se que a trajetória descrita pelo projétil no plano  $xy$  descreve a parábola de equação:

$$y = -ax^2 + bx, \tag{5}$$

onde  $a = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$  e  $b = \tan \theta$

Figura 2 - Trajetória parabólica descrita pelo projétil

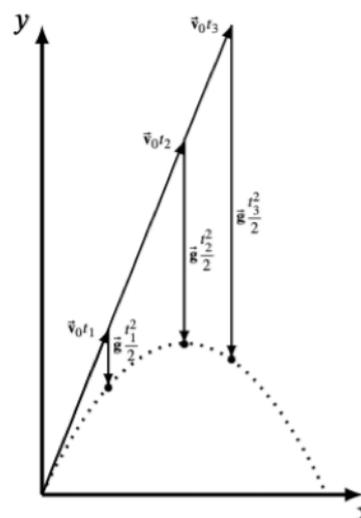


Como observado por Galileu em seu princípio da independência dos movimentos simultâneos (Galilei, 1638), quando um corpo realiza um movimento composto, cada um dos movimentos componentes é realizado como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo. É fácil ver a partir de (4) que a posição  $\vec{r}$  do projétil no instante  $t$  é a composição de dois movimentos independentes:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$$

onde  $\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0 t$  define um movimento retilíneo uniforme na direção de  $\vec{v}_0$ , e  $\vec{r}_2(t) = g \frac{t^2}{2}$ , define um movimento retilíneo uniformemente variado na direção de  $\vec{g}$ . Note que esse último é um movimento de queda livre.

Figura 3 - Independência dos movimentos horizontal e vertical



O tempo (total) de voo do projétil é o tempo transcorrido desde o lançamento até o seu retorno ao eixo  $0x$ . Calcula-se o tempo de voo  $T$  a partir de (4) resolvendo-se a equação  $y(T) = 0$ ,  $T > 0$ . Assim,

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \theta. \tag{6}$$

O alcance do projétil é a distância (sobre o eixo  $0x$ ) entre o ponto de lançamento (neste caso  $x = 0$ ), e o ponto de retorno ao eixo  $0x$ . Por (4), o alcance  $R$  do projétil é:

$$R = x(T) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \tag{7}$$

Pode-se notar ainda que:

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta + v_0^2 \sin^2 \theta - (v_0 \cos \theta - v_0 \sin \theta)^2}{g} \tag{8}$$

Com isso fica fácil ver que invertendo-se as componentes de  $\vec{v}_0$ ,  $R$  permanece inalterado, i.e., o projétil realiza o mesmo alcance para ângulos de lançamento complementares.

Assuma agora que fixando-se uma velocidade escalar inicial de lançamento  $v_0$ , queira-se determinar o ângulo de elevação  $\theta$  que maximize o alcance do projétil. Neste caso,  $R = R(\theta)$ , é uma função do ângulo de elevação e deve-se determinar  $\theta$  para que (8) seja máximo. Logo, deve-se ter:

$$v_0 \cos \theta - v_0 \sin \theta = 0 \iff \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto, para o ângulo de elevação  $\theta = \frac{\pi}{4}$  o alcance do projétil é máximo e igual a  $R = \frac{v_0^2}{g}$ .

Uma vez que os tempos de subida e descida do projétil dependem tão somente do módulo de sua aceleração vertical, tem-se, por simetria, que o tempo transcorrido desde o lançamento do projétil até que atinja o ápice de sua trajetória (vértice da parábola) é o mesmo desde o ápice até seu retorno ao eixo  $0x$ . Com isso concluímos que o tempo para que o projétil atinja o ápice de sua trajetória é  $T = \frac{t}{2} = \frac{v_0}{g} \sin \theta$ , e a máxima altura alcançada é:

$$H = y(T) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta. \tag{9}$$

Alternativamente,  $H$  pode ser obtido da seguinte maneira: De (3) e (4) tem-se que as componentes verticais das velocidade e posição do projétil são, respectivamente

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta t e y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2.$$

Isolando-se  $t$  na primeira expressão e substituindo-o na segunda deriva-se a Equação de Torricelli:

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0) \tag{10}$$

Uma vez que no ápice da trajetória a componente  $v_y$  da velocidade é nula, vê-se de (10) que:

$$0 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2gH \implies H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta.$$

Como anteriormente pode-se indagar sobre o ângulo de lançamento que maximiza a máxima altura do projétil, embora, neste caso, decorra imediatamente de (9) que  $H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$  é atingido em um lançamento vertical, i.e.,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Observa-se ainda que:

$$y\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{3v_0^2}{8g} \sin^2 \theta = \frac{3}{4}H,$$

i.e., o projétil atinge três quartos de sua máxima altura em metade do tempo necessário para atingir sua máxima altura.

Existe ainda uma propriedade bastante interessante e peculiar sobre a localização dos pontos de máxima altura de uma trajetória com velocidade escalar inicial (fixada)  $v_0$ . Para um ângulo de inclinação  $\theta$ , seja  $\vec{r} = (T_\theta) = (x_{T_\theta}, y_{T_\theta})$  a posição do projétil no ápice de sua trajetória. Então:

$$x_{T_\theta} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta e y_{T_\theta} = \frac{v_0^2}{4g} (1 - \cos 2\theta). \tag{11}$$

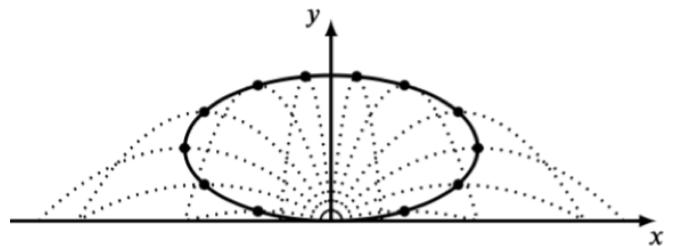
Eliminando-se o ângulo  $\theta$  de (11), vê-se que:

$$\frac{x_{T_\theta}^2}{a'^2} + \frac{(y_{T_\theta} - b')^2}{b'^2} = 1, \tag{12}$$

onde  $a' = \frac{v_0^2}{2g}$  e  $b' = \frac{v_0^2}{4g}$ .

Portanto o lugar geométrico do plano  $xy$  dos pontos que atingem o ápice da trajetória é uma elipse centrada no ponto  $(0, b')$  cujos eixos menor e maior, são, respectivamente,  $2b'$  e  $2'$ .

Figura 4 - Elipse gerada pelos pontos de ápice das trajetórias

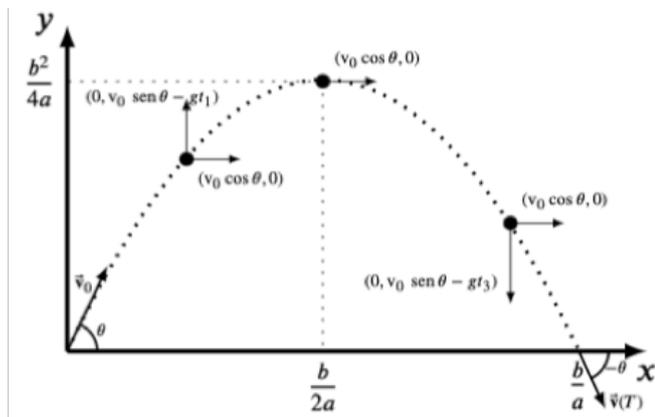


Após o lançamento a componente vertical da velocidade,  $v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt$ , vai desacelerando linearmente até o projétil atingir o ápice de sua trajetória em  $t = T$ , onde  $v_y(T) = 0$ , e volta a acelerar até atingir novamente o eixo  $0x$ , em  $t = 2T$ , com velocidade escalar final,  $|v(2T)| = v_0$ .

Fisicamente, quando o projétil atinge o ápice de sua trajetória, a componente vertical da velocidade, que até então apontava "para cima", se anula, para então mudar de sentido e o projétil iniciar sua trajetória de queda. Já a componente horizontal da velocidade é constante durante toda a trajetória do projétil.

<sup>1</sup>neste caso  $y_0 = 0$ .

Figura 5 - Direção e sentido dos vetores velocidade ao longo da trajetória do projétil



A velocidade escalar média do projétil ao longo de sua trajetória é  $\bar{v} = \frac{L}{T}$ , onde  $T$  é o tempo de voo e  $L$  é o comprimento (de arco) total da trajetória do projétil entre os instantes  $t = 0$  e  $t = T$ . O comprimento  $L$  pode ser calculado de (5) através da expressão:

$$L = \int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{1 + (-2ax + b)^2} dx.$$

Fazendo  $u = -2ax + b$ ,

$$L = \frac{1}{2a} \int_{-b}^b \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{a} \int_0^b \sqrt{1 + u^2} du.$$

Com a mudança de variáveis  $\tan \alpha = u$ , e observando-se que  $a = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$  e  $b = \tan \theta$ , tem-se:

$$L = \frac{1}{2a} \int_0^\theta \frac{1}{\cos^3 \alpha} d\alpha =$$

$$\text{Apêndice A } \frac{v_0^2}{g} \left[ \sin \theta + \cos^2 \theta \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right].$$

(13)

Logo, a velocidade escalar média do projétil ao longo de sua trajetória é:

$$\bar{v} = \frac{L}{T} = \frac{v_0}{2} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right], \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Para os casos limite  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pode-se mostrar via L'Hospital que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) = 1, \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) = 0,$$

e concluir que:

$$\bar{v} = v_0, \text{ se } \theta = 0, \bar{v} = \frac{v_0}{2}, \text{ se } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o ângulo de elevação para o qual o comprimento  $L = L(\theta)$  é máximo, basta encontrar os pontos críticos de (13). Assim:

$$0 = \cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) + \cos^2 \theta \left( \frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\ = 2 \cos \theta \left[ 1 - \sin \theta \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right] \implies 1 = \sin \theta \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right),$$

e verifica-se que  $\theta \approx 56,468^\circ$  é o ângulo ótimo e  $L_{max} \approx 1,2 \frac{v_0^2}{g}$  o comprimento máximo.

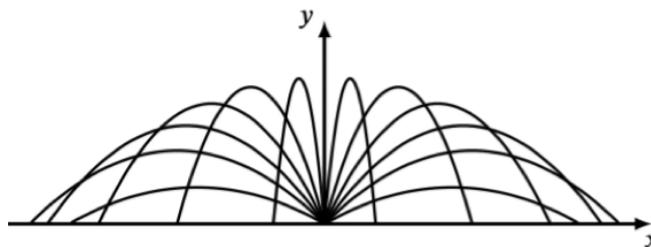
### PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Fixados a velocidade escalar inicial de lançamento  $v_0$  e o ângulo de elevação  $\theta$ , viu-se que o projétil descreve no plano  $xy$  uma trajetória parabólica regida pela equação:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x. \tag{14}$$

Mantendo-se a velocidade inicial  $v_0$  fixada, porém, variando-se o ângulo de lançamento  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , obtém-se uma família de curvas parametrizadas por  $\theta$ , e que descrevem no plano  $xy$ , para cada valor de  $\theta$ , um arco de parábola com equação (14).

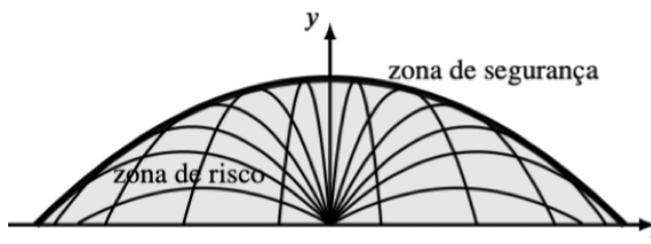
Figura 6 - Família de trajetórias parabólicas



Essa família de parábolas, que têm em comum a mesma velocidade inicial de lançamento tangencia uma parábola "envolvente", única para cada valor de  $v_0$ , denominada parábola de segurança (Pereira e Bonfim (2008)). Tal expressão decorre do fato que a parábola de segurança "separa" o plano  $xy$  em duas regiões disjuntas, a saber:  $[R_1; =]$  O lugar geométrico dos pontos  $(x,y)$  que são "atingidos" pelo projétil para algum ângulo de elevação  $\theta \in (0, \pi)$ ;  $[R_2; =]$  O lugar geométrico dos pontos  $(x,y)$  que não são "atingidos" pelo projétil qualquer que seja o ângulo de elevação  $\theta \in (0, \pi)$ .

A região  $R_1$  é comumente chamada de zona de risco, enquanto  $R_2$  de zona de segurança.

Figura 7 - Separação das zonas de risco e segurança pela parábola de segurança



Para a determinação da expressão matemática da parábola de segurança, assuma que foram dados: um ponto  $(x_0, y_0)$  no plano  $xy$ , e um ângulo de elevação  $\theta$  para o qual  $(x_0, y_0)$  pertence a trajetória do respectivo projétil. Segue de (14) que:

$$y_0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_0^2 + \tan \theta x_0 = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x_0^2 + \tan \theta x_0,$$

e assim:

$$\tan^2 \theta - \frac{2v_0^2}{gx_0} \tan \theta + \left(1 + \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2}\right) = 0. \tag{15}$$

Resolvendo-se (15) para  $\tan \theta$ , determinam-se os possíveis valores de  $\theta$  para os quais  $(x_0, y_0)$  pertence a trajetória do projétil. Entretanto, considerando  $(x_0, y_0)$  existem três possibilidades para o comportamento das soluções de (15). Se

$$\Delta := \left(\frac{2v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2}\right),$$

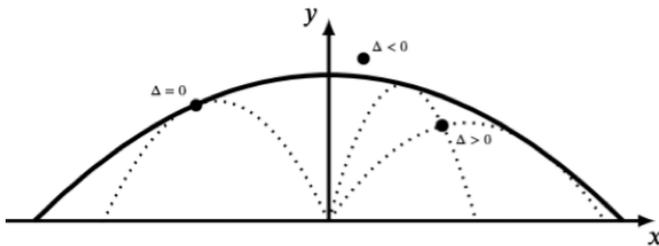
então:

$[\Delta > 0]$  Neste caso a equação (15) fornece dois ângulos de elevação distintos para os quais  $(x_0, y_0)$  pertence a trajetória dos respectivos projéteis;

$[\Delta = 0]$  Neste caso a equação (15) fornece apenas um ângulo de elevação para o qual  $(x_0, y_0)$  pertence a trajetória do projétil;

$[\Delta < 0]$  Neste caso não existe trajetória possível que contenha o ponto  $(x_0, y_0)$ .

Figura 8 - Parábola de segurança



O caso  $\Delta = 0$  é de particular interesse. Ele fornece a trajetória limite para que um alvo localizado no ponto de coordenadas  $(x, y)$  seja atingido por algum projétil lançado com a velocidade escalar inicialmente fixada  $v_0$ . Portanto, para a determinação de tais pontos, impõe-se a condição

$$\left(\frac{4v_0^2}{gx}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) = 0,$$

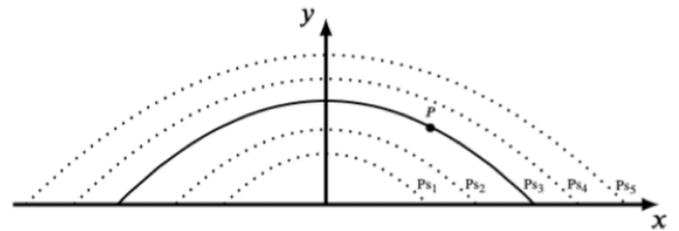
ou, de modo equivalente,

$$x^2 + 2Ry - R^2 = 0, \tag{16}$$

onde  $R = \frac{v_0^2}{g}$  é o alcance máximo de qualquer projétil lançado da origem com velocidade escalar inicial  $v_0$ . A equação (16) fornece a expressão para a parábola de segurança.

Para cada velocidade escalar inicial de lançamento existe uma, e somente uma parábola de segurança associada a ela. Parábolas de segurança associadas a velocidades iniciais de lançamento distintas nunca se interceptam. Isso significa que para uma sucessão de velocidades iniciais de lançamento  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ , existirão as respectivas parábolas de segurança  $Ps_{v_1}, Ps_{v_2}, Ps_{v_n}$  que envolvem as respectivas zonas de risco  $R_{v_1} \subset R_{v_2} \subset \dots \subset R_{v_n}$ . (Vide Figura 9).

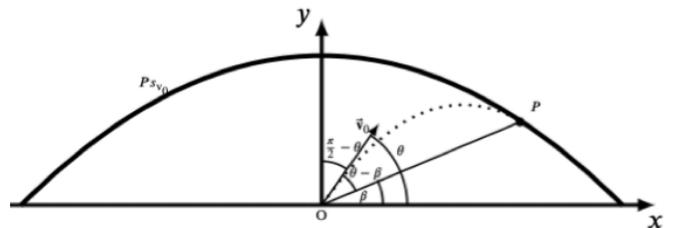
Figura 9 - Velocidade mínima de lançamento



Considere agora o problema da determinação do ângulo de elevação para que o projétil lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$  "atinga" o ponto  $P \in Ps_{v_0}$ .

Seja  $\beta$  o ângulo de inclinação do segmento  $OP$  (vide Figura 10). Então  $P = (x, y)$  é tal que  $y = \tan \beta x$ .

Figura 10 - Ângulo de disparo ótimo



Substituindo em (16), tem-se:

$$x^2 + 2R \tan \beta x - R^2 = 0 \Rightarrow x = R \left(\frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}\right).$$

Logo,

$$P = \left(\frac{v_0^2}{g} \left[\frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}\right], \frac{v_0^2}{g} \left[\frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}\right] \tan \beta\right)$$

De (15) segue que

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} \Rightarrow \sin \theta = \cos(\theta - \beta).$$

Logo,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \beta) \iff \theta - \beta = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

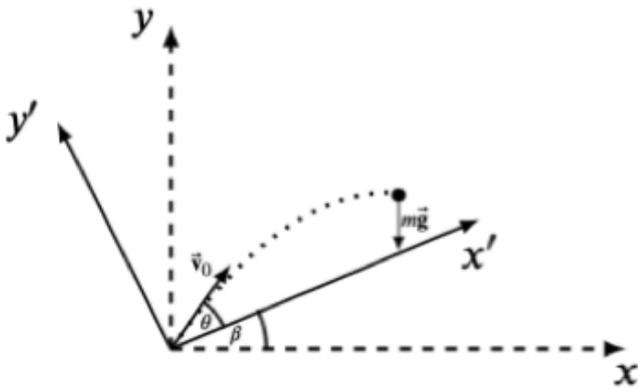
$$\tag{17}$$

ou seja, para que  $P \in P_{s_{v_0}}$  pertença a trajetória do projétil, é necessário e suficiente que  $\vec{v}_0$  esteja sobre a bissetriz do ângulo formado pelo segmento  $OP$  e o eixo  $0y$ .

### LANÇAMENTO OBLÍQUO GENERALIZADO

Fixado um ângulo  $\beta$  com respeito ao eixo  $0x$ , suponha que o lançamento ocorra sobre um plano de inclinação  $\tan\beta$ .

Figura 11 - Lançamento oblíquo generalizado



Considerando-se o novo sistema de coordenadas cartesianas  $0x'y'$ , as equações do movimento para a trajetória  $\vec{r}(t) = (x'(t), y'(t))$  do projétil são:

$$\frac{d^2x'}{dt^2}(t) = -g \sin \beta, \frac{d^2y'}{dt^2}(t) = -g \cos \beta.$$

Logo,

$$\vec{r}(t) = \left( v_0 \cos \theta t - \frac{g \sin \beta}{2} t^2, v_0 \sin \theta t - \frac{g \cos \beta}{2} t^2 \right). \tag{18}$$

O tempo de voo do projétil é o tempo transcorrido desde o seu lançamento até o seu retorno ao eixo  $0x'$  que, neste caso, é dado por:

$$T' = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta. \tag{19}$$

Logo, o alcance do projétil é:

$$R' = x'(T) = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} \sin \theta \cos (\theta + \beta). \tag{20}$$

Para maximizar  $R' = R'(\theta)$  basta determinar os pontos críticos de (20), assim:

$$0 = \cos \theta \cos (\beta + \theta) - \sin \theta \sin (\beta + \theta) = \cos^2 (\beta + 2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi/2 - \beta}{2}.$$

Logo, para que o alcance seja máximo,  $\vec{v}_0$  deve estar sobre a bissetriz do ângulo formado entre os eixos  $0x'$  e  $0y'$ . Note que esse é o caso no qual a trajetória do projétil intercepta a respectiva parábola de segurança. Além disso,

$$R'_{max} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (1 - \sin \beta) = \left| \overline{OP} \right|.$$

(vide figura10)

### APLICAÇÕES

Em todas as aplicações desta seção assumiremos que não há forças resistivas de arrasto atuando no projétil que sofre apenas efeito da ação uniforme da gravidade.

1. Um projétil lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$  atinge sua parábola de segurança no instante  $t = t_p$ . Mostre que os vetores velocidade  $\vec{v}_0$  e  $\vec{v}(t_p)$  são ortogonais.

Em particular para o ângulo de elevação  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , os vetores velocidade inicial  $\vec{v}_0$  e velocidade final  $\vec{v}(T)$  são perpendiculares.

Solução:

Se  $\vec{r}(t_p) = (v_0 \cos \theta t_p, v_0 \sin \theta t_p - \frac{g}{2} t_p^2) \in P_{s_{v_0}}$ , segue de (16)

$$\text{que } -t_p^2 v_0^2 \sin^2 \theta + \frac{2v_0^3}{g} \sin \theta t_p - \frac{v_0^4}{g^2} = 0 \Rightarrow t_p = \frac{v_0}{g \sin \theta}.$$

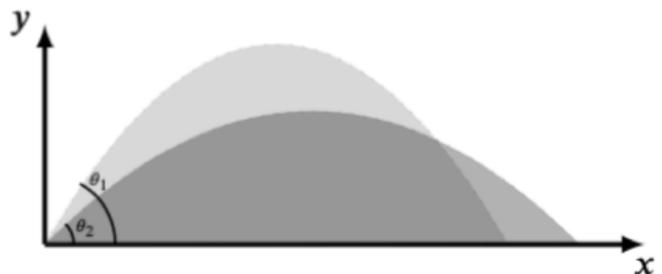
$$\text{Logo } \vec{v}(t_p) = v_0 \left( \cos \theta, \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

e é fácil ver que  $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}(t_p) = 0$ .

Se  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , a trajetória e a parábola de segurança interceptam-se no ponto sobre o eixo  $0x$  de máximo alcance dentre todos os lançamentos, a saber  $(R, 0) = \left( \frac{v_0^2}{g}, 0 \right) = (x(T), 0)$ .

2. Um projétil é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$ . Qual é o ângulo de elevação  $\theta$  que maximiza a área  $A$  sob a trajetória?

Figura 12 - Comparação de áreas sob a trajetória



**Solução:**

Por (5) podemos expressar  $A = A(\theta)$  como:

$$A = \int_0^{\frac{b}{a}} (-ax^2 + bx) dx = \frac{b^3}{6a^2} = \frac{2v_0^4}{3g^2} \sin^3 \theta \cos \theta. \tag{21}$$

Observe que (21) também pode ser obtido da relação geométrica  $A = \frac{2}{3}RH$ , onde  $R$  e  $H$  são, respectivamente, o alcance e a máxima altura do projétil.

Para determinar o ângulo de elevação ótimo determinam-se os pontos críticos de (21). Assim,  $0 = \sin^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 1)$ , cuja única solução no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  é  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

3. (UNICAMP - 2002) Um projétil é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$ . Dois artilheiros calculam a trajetória do projétil: um deles, Simplício, utilizou a noção de *impetus*; o outro, Salviati, as idéias de Galileu. Os dois artilheiros concordam apenas em uma coisa: o alcance. Mostre que o alcance do projétil coincide nos dois casos. Calcule a máxima altura alcançada pelo projétil segundo Simplício e segundo Salviati.

**Solução:**

Para ambos os casos tem-se:

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt,$$

com o tempo de subida do projétil igual ao seu tempo de descida. Portanto o tempo de voo do projétil é

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \theta,$$

e o alcance

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta,$$

comum a ambos (vide (6) e (7)). Porém, para Simplício, a altura é

$$H_{Si} = R \tan \theta = \frac{2v_0^2}{g} \sin^2 \theta,$$

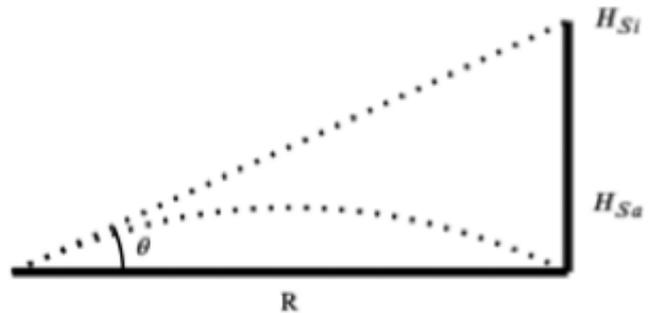
(vide Figura 13) enquanto que para Salviati a altura é

$$H_{Sa} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta$$

(vide (9)). Note ainda a relação

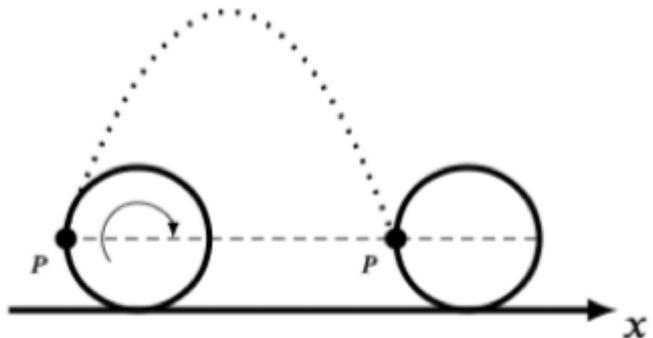
$$\frac{H_{Si}}{H_{Sa}} = 4.$$

Figura 13 - Simplício x Salviati



4. Uma circunferência de raio  $r$  gira com velocidade constante sobre um eixo horizontal. Do ponto  $P$  (vide Figura 14) se desprende uma partícula, que após estar no ar, volta a cair sobre o mesmo ponto da circunferência. Qual a velocidade da circunferência?

Figura 14 - Trajetória de uma partícula em suspensão



**Solução:**

Sejam  $v$  a velocidade escalar com que a circunferência está se deslocando sobre o eixo  $0x$  e  $T$  o tempo de voo da partícula. Da localização de  $P$  (ponto de lançamento) observa-se que  $v_x(t) = v$  e  $v_y(t) = v - gt$ . Como  $0 = v_y(\frac{T}{2})$ , segue que  $v = \frac{gT}{2}$ . Então:

$$v = \frac{2n\pi r}{T} = \frac{gn\pi r}{v} \Rightarrow v = \sqrt{gn\pi r},$$

onde  $n$  é o número de revoluções que a circunferência realiza no intervalo de tempo  $[0, T]$ .

5. (ITA - 2009) Dois projéteis são lançados de um mesmo ponto ao mesmo tempo. O projétil  $P_1$ , com velocidade escalar inicial  $v_1$  e ângulo de elevação  $\theta_1$ , o projétil  $P_2$ , com velocidade escalar inicial  $v_2$  e ângulo de elevação  $\theta_2$ . Calcule a distância  $d$  entre os projéteis no instante em que o primeiro alcança o ápice de sua trajetória.

**Solução:**

Segue de (4) que a trajetória do projétil  $P_i$ ,  $i = 1, 2$  é dada por

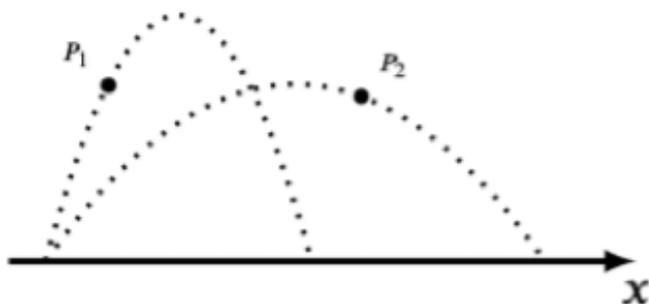
$$\vec{r}_i(t) = (v_i \cos \theta_i t, v_i \sin \theta_i t - \frac{g}{2} t^2).$$

Sendo  $T_1 = \frac{v_1}{g} \sin \theta_1$  o tempo para que  $P_1$  atinja o ápice de sua trajetória, segue que

$$\begin{aligned} d^2 &= |\vec{r}_1(T_1) - \vec{r}_2(T_1)|^2 \\ &= \left(\frac{v_1 \sin \theta_1}{g}\right)^2 (v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2)^2 + \left(\frac{v_1 \sin \theta_1}{g}\right)^2 (v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1)^2 \\ &= \left(\frac{v_1 \sin \theta_1}{g}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

6. Dois projéteis são lançados de um mesmo ponto com a mesma velocidade escalar inicial e seguem trajetórias descritas na Figura 15. Qual projétil tem o menor tempo de voo?

Figura 15 - Comparação de tempos de Voo

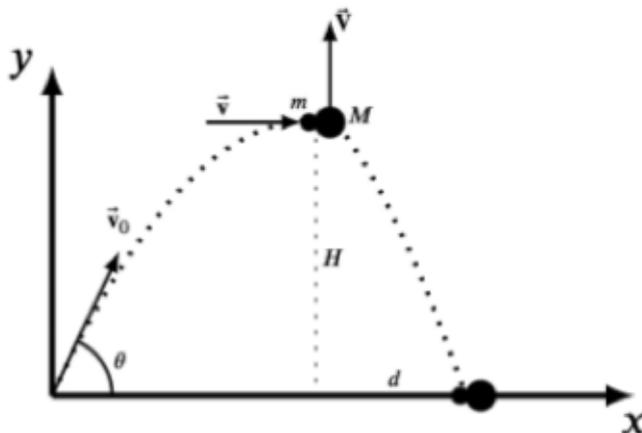


**Solução:**

Sendo  $v_0$  a velocidade escalar inicial de lançamento dos projéteis, o respectivo tempo de voo é  $T_i = \frac{2v_0}{g} \sin \theta_i, i = 1, 2$ . Logo  $T_2 < T_1$ .

7. (ITA - 2011) Um projétil de massa  $m$  é lançado com velocidade escalar inicial  $v$  e um ângulo de elevação  $\theta$ . No ápice de sua trajetória, o projétil é interceptado por um segundo projétil, de massa  $M$  e velocidade escalar  $V$ , que havia sido lançado verticalmente do eixo horizontal  $0x$ . Considerando que os dois projéteis “unem-se” após o impacto e desprezando qualquer tipo de resistência aos movimentos, determine a distância  $d$  do ponto de queda dos projéteis em relação ao ponto de lançamento do segundo projétil.

Figura 16 - Choque entre projéteis



Sem perda de generalidade pode-se assumir que  $V \vec{V}$  possui o sentido indicado na Figura 16. Caso contrário, na sequência basta trocar  $V$  por  $-V$ .

Por hipótese o momento linear ( $P = mv$ ) dos projéteis é conservado (antes e depois do choque). Logo, decompondo-se os movimentos nas direções dos eixos coordenados tem-se:

$$mv \cos \theta = (m + M)v_x \Rightarrow v_x = \frac{mv \cos \theta}{m + M},$$

onde  $v_x$  é a componente horizontal da velocidade (do conjunto) dos projéteis após a colisão. Similarmente,

$$MV = (m + M)v_y \Rightarrow v_y = \frac{MV}{m + M}.$$

Portanto o tempo  $t_q$  de queda (do conjunto) dos projéteis após a colisão é obtido resolvendo-se a equação:

$$0 = H + v_y t - \frac{g}{2} t^2. \tag{22}$$

De (9) sabemos que  $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$ . Logo a única solução positiva para (22) é:

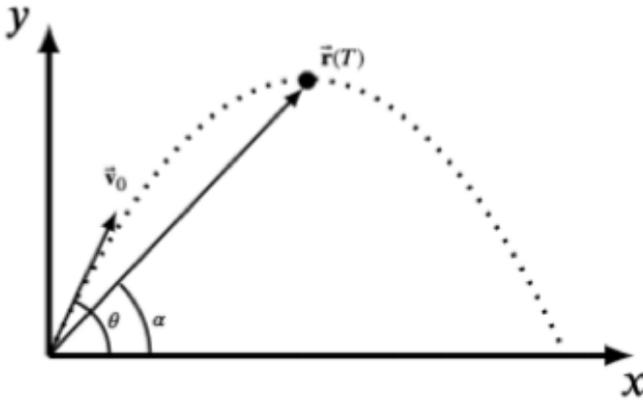
$$t_q = \frac{\frac{MV}{m+M} + \sqrt{\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2 + v^2 \sin^2 \theta}}{g}.$$

Portanto

$$d = v_x t_q = \left(\frac{mv \cos \theta}{m + M}\right) \left(\frac{\frac{MV}{m+M} + \sqrt{\left(\frac{MV}{m+M}\right)^2 + v^2 \sin^2 \theta}}{g}\right).$$

8. (AFA - 2022) Um projétil é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e um ângulo de elevação  $\theta$ . No ápice de sua trajetória, o vetor posição  $\vec{r}(T)$  faz com o eixo horizontal  $0x$  um ângulo  $\alpha$ . Mostre que  $\frac{\tan\theta}{\tan\alpha} = 2$ .

Figura 17 - Relação entre ângulos



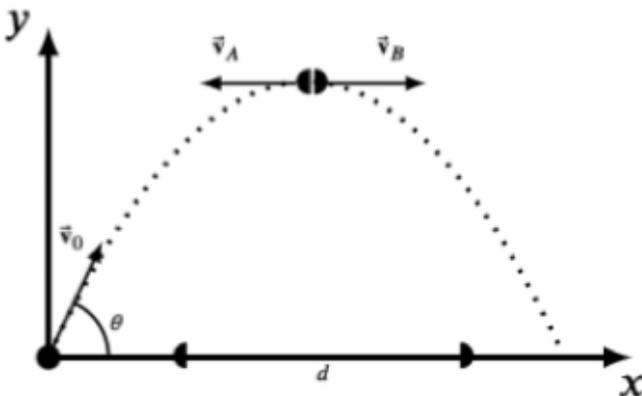
Solução:

De fato, sabendo-se que  $T = \frac{v_0}{g} \sin \theta$ , tem-se por (4) que  $r(T) = \left( \frac{v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta, \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta \right)$ .

Assim,  $\tan \alpha = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}} = \frac{\tan \theta}{2}$ .

9. (Escola Naval - 2014) Um projétil de massa  $m$  é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$ . No ápice de sua trajetória, o projétil separa-se em dois fragmentos iguais, sendo que um deles (fragmento A) sofre apenas uma inversão no seu vetor velocidade. Calcule a distância  $d$ , entre os dois fragmentos quando o fragmento A atinge o solo.

Figura 18 - Fragmentação do projétil



Solução:

Como o momento linear do projétil é conservado (antes e depois da separação), decompondo-se os movimento nas direções dos eixos coordenados tem-se:

$$mv_x = \frac{m}{2}v_A + \frac{m}{2}v_B \Rightarrow v_x = \frac{v_A+v_B}{2}. \tag{23}$$

Se  $T = \frac{v_0}{g} \sin \theta$  denota o tempo para o projétil atingir o ápice de sua trajetória, e observando que  $v_A = -v_0 \cos \theta$ , tem-se  $v_A = -gT \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ . Daí segue de (23) que:

$$2v_x = 2gT \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -gT \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + v_B \Rightarrow v_B = 3gT \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

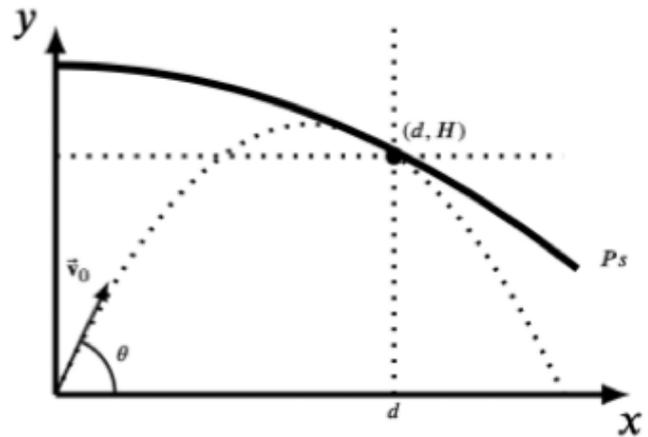
Como os tempos de subida e descida do projétil são iguais, segue que:

$$d = |v_A T| + |v_B T| = 4gT^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

10. Um projétil é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$ . Variando-se o ângulo de elevação  $\theta$ , qual a altura  $H$  máxima que o projétil pode atingir quando sua distância horizontal é  $d$  unidades do ponto de lançamento?

Solução:

Considere a reta  $x = d$  (vide Figura 19). O ponto  $(d, H)$  de maior ordenada que pode ser atingido por uma trajetória com velocidade inicial  $v_0$  é aquele que pertence a parábola de segurança determinada por  $v_0$ .

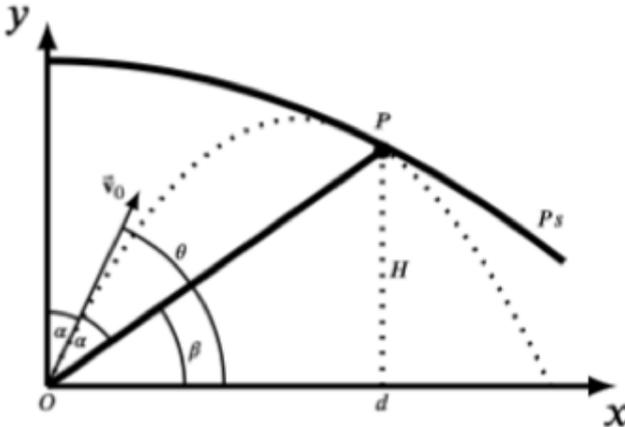


Portanto segue de (16) que:

$$d^2 + \frac{2v_0^2}{g}H - \frac{v_0^4}{g^2} = 0 \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}.$$

11. Qual é a velocidade escalar inicial  $v_0$  mínima com que um projétil deve ser lançado para que ultrapasse um obstáculo de altura  $H$  distante  $d$  unidades do ponto de lançamento? Qual o respectivo ângulo  $\theta$  de elevação?

Figura 20 - Velocidade mínima generalizada



**Solução:**

A velocidade mínima é a velocidade  $v_0$  associada a parábola de segurança que passa pelo ponto  $P = (d, H)$ . De (16) tem-se:

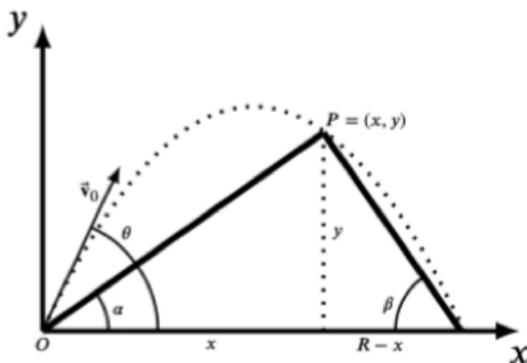
$$d^2 + \frac{2v_0^2}{g} H - \frac{v_0^4}{g^2} = 0 \Rightarrow v_0^2 = gH + g\sqrt{H^2 + d^2}.$$

Observando que o ângulo de inclinação de  $\overline{OP}$  é  $\beta = \arctan\left(\frac{H}{d}\right)$ , tem-se por (17) que:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

12. Um projétil é lançado com velocidade escalar inicial  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$  de um dos vértices de um triângulo com base no eixo horizontal  $0x$ . Ele passa tangenciando um dos vértices e aterrissa no terceiro vértice que está na base horizontal (vide Figura 21). Se os ângulos da base do triângulo são  $\alpha$  e  $\beta$ , mostre que  $\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta$ .

Figura 21 - Trajetória circunscrita a triângulo



**Solução:**

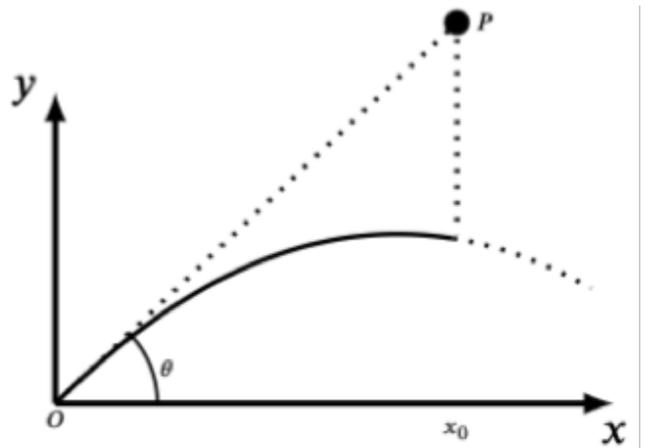
$$\text{Tem-se } \tan \alpha = \frac{y}{x} \text{ e } \tan \beta = \frac{y}{R-x} \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{yR}{x(R-x)}.$$

Uma vez que  $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \Rightarrow v_0^2 = \frac{gR}{2\sin\theta\cos\theta}$ . Como  $P = (x, y)$  pertence a trajetória do projétil, segue de (5) que:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan \theta x = x \tan \theta \left(1 - \frac{x}{R}\right) \Rightarrow \tan \theta = \frac{yR}{x(R-x)}.$$

13. Um alvo suspenso está localizado no ponto  $P = (x_0, y_0)$  do plano  $xy$  cujo segmento  $OP$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal  $0x$ . O alvo é solto no exato instante em que um projétil é lançado da origem com velocidade escalar inicial  $v_0$ , ângulo de elevação  $\theta$  e alcance  $R$ . Mostre que se  $R \geq x_0$  o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade  $v_0$ .

Figura 22 - Alvo em queda livre



Enquanto o alvo percorre sua trajetória de queda livre descrita pela expressão  $P(t) = (x_0, y_0 - \frac{g}{2}t^2)$ , o projétil descreve sua trajetória  $r(t)$  dada em (4). Com isso a condição de impacto  $r(t_p) = P(t_p)$ , é satisfeita para  $t_p = \frac{x_0}{v_0} \cos \theta$ , mostrando que o tempo para impacto é inversamente proporcional a velocidade escalar inicial e que o impacto sempre ocorre se o alcance  $R$  do projétil superar  $x_0$ .

Pode-se observar ainda que a velocidade escalar inicial mínima para que o projétil atinja o alvo é dada pela condição:

$$R = x_0 \iff \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = x_0 \iff v_0 = \sqrt{\frac{gx_0}{\sin 2\theta}}.$$

Neste caso o impacto ocorre no exato instante em que o alvo atinge o eixo  $0x$ .

APÊNDICE A

$$\begin{aligned}
 \int_0^\theta \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} &= \int_0^\theta \frac{\cos\alpha}{\cos^4\alpha} d\alpha \\
 &= \int_0^\theta \frac{\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2} d\alpha \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\theta \cos\alpha \left[ \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} \right]^2 d\alpha \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\theta \left[ \frac{\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} + \frac{\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} \right] d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\cos\alpha}{(1-\sin^2\alpha)} d\alpha \\
 &=_{\sin\alpha=u} \frac{1}{4} \int_0^{\sin\theta} \left[ \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{(1-u)^2} \right] du + \frac{1}{4} \int_0^{\sin\theta} \left[ \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} \right] d\alpha \\
 &=_{\sin\alpha=u} \frac{1}{4} \left[ \frac{-1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} \right] + \frac{1}{4} \int_0^{\sin\theta} \left[ \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right] du \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \right] + \frac{1}{4} [\ln(1+\sin\theta) - \ln(1-\sin\theta)] \\
 &= \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) \\
 &= \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{4} \ln\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \right].
 \end{aligned}$$

## APÊNDICE B

Tabela 1 - Lançamento de um projétil com velocidade escalar  $v_0$  e ângulo de elevação  $\theta$ 

Posição horizontal	$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t$	Posição vertical	$x(t) = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2$
Velocidade horizontal	$v_x(t) = v_0 \cos \theta$	Velocidade vertical	$v_y(t) = v_0 \sin \theta t - gt$
Tempo de voo	$T = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$	Tempo até o ápice	$T = \frac{v_0}{g} \sin \theta$
Alcance	$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$	Alcance máximo	$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \theta = \frac{\pi}{4}$
Altura no ápice	$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta$	Altura máxima	$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}, \theta = \frac{\pi}{2}$
Área sob trajetória	$\frac{2v_0^4}{3g^2} \sin^3 \theta \cos \theta$	Área máxima	$A_{max} = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{v_0^4}{g^2}, \theta = \frac{\pi}{3}$
Comprim. trajetória	$\frac{v_0^2}{g} \left[ \sin \theta + \cos^2 \theta \ln \left( \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \right) \right]$	Comprimento máximo	$L_{max} \approx \frac{1,2^2 v_0^2}{g}, \theta \approx 56,468$
Posi. horiz. generalizada	$x'(t) = x'_0 + v_0 \cos \theta t - \frac{g \sin \beta}{2} t^2$	Posi. vert. generalizada	$y'(t) = y'_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{g \cos \beta}{2} t^2$
Vel. horiz. generalizada	$v_{x'}(t) = v_0 \cos \theta - g \sin \beta t$	Vel. vert. generalizada	$v_{y'}(t) = v_0 \sin \theta - g \cos \beta t$
Tempo voo generalizado	$T' = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$	Tempo ápice generalizado	$T' = \frac{v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$
Alcance generalizado	$\$R' = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} \sin \theta \cos (\theta + \beta)\$$	Alcance máx. generalizado	$R' = \frac{v_0^2(1-\sin \beta)}{g \cos^2 \beta}, \theta = \frac{\pi/2-\beta}{2}$

## REFERÊNCIAS

- BRITO, R. **Fundamentos de mecânica**, 2 ed. [S.l.]: VestSeller, (2010).
- COURANT, R.; JOHN, F. **Introduction to calculus and analysis**, Interscience-Wiley Publishers, New York, (1965).
- GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze**, [S.l.]: Ludovico Elzeviro, (1638).
- GRIFFITH, B.A.; SYNGE, J.L. **Principles of mechanics**, 2 ed. New York: McGraw-Hill Book Company, (1968).
- NEWTON, I. **Philosophiae naturalis principia mathematica**. London: Streater, (1687).
- PEREIRA, L. R., BONFIM, V. Regiões de segurança em lançamento de projéteis, **Revista Brasileira De Ensino de Física**, v. 30, n. 3, 2008.
- SILVA, M. F. F. DA.; SEGRE, E. R. A. Um problema não trivial de projéteis, **Revista Brasileira De Ensino de Física**. 26, n. 3, 2004.
- STEWART, J. **Calculus**, v. 2. 6 ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2009.